A. Exercices sur les fonctions circulaires.

Exercice 1

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + 0{,}3^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - 0.3^2 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0.91$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\sqrt{0.91} \text{ ou } \cos x = \sqrt{0.91}.$$

Or $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leq 0$ donc $\cos x = -\sqrt{0.91}$

On en déduit : $\cos(-x) = \cos x = -\sqrt{0.91}$; $\sin(\pi - x) = \sin x = 0.3$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = 0.3$; $\sin(5\pi + x) = \sin(x + \pi + 4\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x = -0.3$

Comme $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ on en déduit qu'une valeur de x arrondie au dixième de radian sera : $\pi - Arcsin(0.3) \approx 2{,}8$

Exercice 2

1. L'équation $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ est équivalente à $\sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Elle admet dans $\mathbb{R}$ deux familles de solutions : $t = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $t = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
   Soit $t = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi$ et $t = \frac{5\pi}{4} + k \times 2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.
2. L'équation $\cos t = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est équivalente à $\cos t = \frac{1}{2}$ est équivalente à $\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
   Elle admet sur $\mathbb{R}$ deux familles de solutions : $t = \frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \; et \; t = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   Or, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont les deux seules valeurs appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   Donc l'équation $\cos t = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ admet dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ deux solutions : $\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$.
3. L'équation $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est équivalente à $\sin t = \frac{1}{2}$ est équivalente à $\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
   Elle admet sur $\mathbb{R}$ deux familles de solutions : $t = \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ et $t = \pi - \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi = \frac{5\pi}{6} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   Or, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont les deux seules valeurs appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
   Donc l'équation $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ admet dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ deux solutions : $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Exercice 3

1. $T = 4$. Alors $u(t+4) = a\cos\big(b(t+4)\big) = a\cos(bt + 4b) = u(t) = \mathrm{a}\cos(bt)$.
   La fonction cosinus étant périodique de période 2π on en déduit que $4b = 2\pi$ soit $= \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. On a alors : $u(t) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.
2. $u(0) = 3$ donc $a\cos(0) = 3$ soit $a = 3$ car $\cos(0) = 1$.
3. On en déduit que $u(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

B. Applications de la dérivation.

Exercice 1

1. f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 + 4x$.
2. On a : $f(-1) = -3$ et $f'(-1) = -1$, or une équation de la tangente au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1)$ soit $y = (-1)(x + 1) - 3$ soit $y = -x - 4$.
3. $d(x) = f(x) - (-x - 4) = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$
   $d(x)$ a le signe de x car $(x + 1)^2$ est positif ou nul.
4. Si $x < 0$ alors C est en dessous de T car $d(x) < 0$;si $x > 0$ alors C est au-dessus de T car $d(x) < 0$.

Exercice 2

1. $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
   L'équation $g'(x) = 0$, a pour racines 1 et 3.
   $$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 9 = 36$$
   $x_1 = \frac{-(-12)-\sqrt{36}}{2\times3} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-12)+\sqrt{36}}{2\times3} = 3$
   On a donc le tableau de variation suivant sur l'intervalle $[-1; 4]$:

x	-1		1		3		4
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	-18	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

2. $g(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 + 9 \times 2 - 2 = 0$; sur chacun des intervalles $[-1; 1]$, $[1; 3]$, $[3; 4]$, la fonction g est dérivable, strictement monotone et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur chaque intervalle, soit 2 et deux autres solutions : α dans l^' intervalle $[-1; 1]$ et β dans l'intervalle $[3; 4]$.
3. A l'aide de la calculatrice on trouve : $0.2 < \alpha < 0.3$ *et* $3.7 < \beta < 3.8$.

x	-1		α		2		β		4
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		$+0$

4.

C. Exercices sur le produit scalaire.

Exercice 1

1. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\big).\big(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\big) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} = -16 + 0 + 0 + 9 = -7$
2. $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
3. $OC = OD = \frac{1}{2}AC$ avec, en utilisant l'égalité de Pythagore, $AC = 5$, soit : $OC = OD = \frac{5}{2}$.

4. D'après la réponse 1. Et 2., $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} = -\frac{7}{4}$, et $\cos(\widehat{DOC}) = \frac{\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD}}{OC\times OD} = -\frac{7}{25}$.
   D'où $\widehat{DOC} \simeq 106°$.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 8 \times 4 \times \cos 60° = 16$.
   Or $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB \times AH$ donc $AH = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}{AB} = 2$.
   En utilisant l'égalité de Pythagore : DH=$\sqrt{AD^2 - AH^2} = 2\sqrt{3}$.
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 48$, $AK = 6$ et $CK = 6$.
3. $Aire\ (ABCD) = Aire(AHD) + Aire(HKCD) + Aire(KBC)$
   $AIRE(AHD) = \frac{AH\times HD}{2} = 2\sqrt{3}$;
   $AIRE(HKCD) = \frac{(CK+HD)\times HK}{2} = \frac{(6+2\sqrt{3})\times 4}{2} = 12 + 4\sqrt{3}$;
   $Aire(KBC) = \frac{BK\times KC}{2} = 6$; d'où : $Aire(ABCD) = 18 + 6\sqrt{3} \simeq 28.39$.

D. Probabilité

1. On répète 20 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli : choisir une pièce au hasard et vérifier si elle n'est pas conforme (succès de probabilité 0,02).On a donc un schéma de Bernoulli.
   X compte le nombre de succès.
   On peut donc conclure que $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0{,}02.}$
2. $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{20}{0} \times 0{,}02^0 \times (1 - 0{,}02)^{20-2}$
   $$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) \approx 0{,}67}$$
3. La probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme est de :
   $$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0)$$
   $$\approx 0{,}33$$
4. $E(X) = np = 0{,}02 \times 20$
   $$\boxed{E(X) = 0{,}4}$$

$\boxed{\text{Il y a en moyenne 0,4 pièces non conforme dans un lot de 20.}}$

5. Calculer la probabilité que l'entreprise doive rembourser le lot vendu (arrondir à 10^{-3}).
   $$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2)$$
   $$\mathbb{P}(X \geq 3)\boxed{\approx 0{,}007}$$

E. Exercice sur les suites

1. **Si** la suite u est géométrique **alors** $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$
   $$u_1 = 5u_0 + 2 = 5 \times 2 + 2 = 12$$
   $$u_2 = 5u_1 + 2 = 5 \times 12 + 2 = 62$$
   $\frac{u_2}{u_1} = \frac{62}{12}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{12}{2} = 6$
   Donc, $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$
   Donc, $\boxed{u \text{ n'est pas géométrique}}$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= 5u_n + 2 + \frac{1}{2} \\ &= 5u_n + \frac{5}{2} \\ &= 5\left(u_n + \frac{1}{2}\right) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc, la suite } v \text{ est géométrique de raison 5.}}$

$$v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$\boxed{\text{Donc, le premier terme de la suite } v \text{ est } \frac{5}{2}}$

3. La suite v étant géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $\frac{5}{2}$ on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 q^n$$
$$\boxed{v_n = \frac{5}{2} \times 5^n}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = v_n - \frac{1}{2}$

   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\boxed{u_n = \frac{5}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}}$$