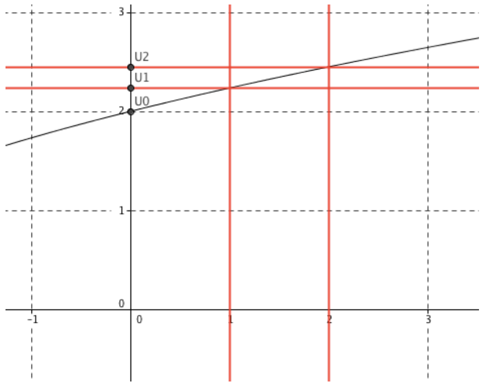
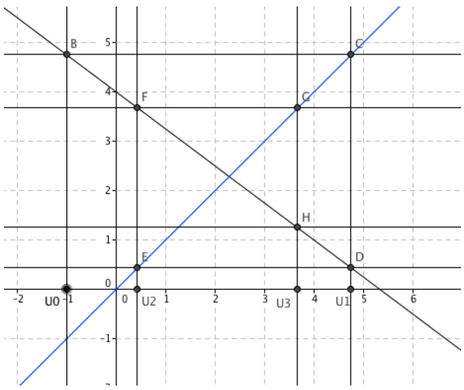
Feuille de révision pour septembre 2017C

Exercice 1



$u_0 = f(0) = \sqrt{0+4} = 2$
$u_1 = f(1) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$u_2 = f(2) = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

Exercice 2



$u_0 = -1 \quad u_1 = f(u_0) = f(-1) = \dfrac{19}{4} \quad u_2 = f(u_1) = f(\dfrac{19}{4}) = \dfrac{7}{16} \quad u_3 = f(u_2) = f(\dfrac{7}{16}) = \dfrac{235}{64}$

1) $u_1 - u_0 = \dfrac{19}{4} - 1 = \dfrac{15}{4} > 0$ donc la suite (u_n) n'est pas décroissante.
$u_2 - u_1 = \dfrac{7}{16} - \dfrac{19}{4} = -\dfrac{69}{16} < 0$ donc la suite (u_n) n'est pas croissante.
Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.
2)
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
3)
$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{19}{4}}{-1} = -\dfrac{19}{4}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{7}{16}}{\frac{19}{4}} = \dfrac{7}{76}$
$\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4) Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = f(u_{n-1}) = -\frac{3}{4}u_{n-1} + 4$

Exercice 3

1) **a**) $u_1 = \frac{1}{2} \times 10 + 7 = \boxed{12}$, $u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 7 = \boxed{13}$, $u_3 = \frac{1}{2} \times 13 + 7 = \boxed{\frac{27}{2}}$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = \frac{1}{2}x + 7$.

$$\text{Iterates: } \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 13 \\ \frac{27}{2} \\ \frac{55}{4} \\ \frac{111}{8} \\ \frac{223}{16} \\ \frac{447}{32} \\ \frac{895}{64} \\ \frac{1791}{128} \\ \frac{3583}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 12.0 \\ 13.0 \\ 13.5 \\ 13.75 \\ 13.875 \\ 13.938 \\ 13.969 \\ 13.984 \\ 13.992 \\ 13.996 \end{pmatrix}$$

b) $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = \frac{u_n}{2} + 7 - 14 = \frac{1}{2}u_n - 7 = \frac{1}{2}(v_n - 14) = \frac{1}{2}v_n$.

$v_0 = u_0 - 14 = 10 - 14 = -4$

Donc

$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = -4 \text{ et de raison } q = \frac{1}{2}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} , v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 14 = 14 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 14$

3)

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = -4\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \text{ donc } \boxed{S_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8}$$

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \underline{\sum_{i=0}^{n} 14 + \sum_{i=0}^{n} v_i} = 14(n+1) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8 \text{ donc } \boxed{T_n = 14n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6}$$

4)

a) L'algorithme détermine pour quelle valeur de n, on a $abs(u_n - 14) \leq P$.

b) Soit $P = 1$.

	n	u	test $abs(u-14) > P$
	0	10	oui
étape 1	1	12	oui
étape 2	2	13	oui
étape 3	3	13,5	non

Exercice 4

1. a) f est définie, pour tout réel x tel que $2x-4 \neq 0$ donc son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f'(x) = \dfrac{(12x-14)(2x-4)-2(6x^2-14x+5)}{(2x-4)^2} = \dfrac{6x^2-24x+23}{(2x-4)^2}$

Recherche des solutions de $6x^2-24x+23=0$ ou recherche des racines de $6x^2-24x+23$

$\Delta = 24^2 - 4\times 6\times 23 = 24$

$24 > 0$ donc les racines de $6x^2-24x+23$ sont

$x_1 = \dfrac{24+\sqrt{24}}{2\times 6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{6}+2$ et $x_2 = \dfrac{24-\sqrt{24}}{2\times 6} = -\dfrac{1}{6}\sqrt{6}+2$

$6x^2-24x+23$ est un trinôme du second degré , son signe est celui de a à l'extérieur des racines..

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		2		$\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		$+\infty$
signe de $6x^2-24x+23$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(2x-4)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2\right]$ et $\left[\frac{1}{6}\sqrt{6}+2\,;\ +\infty\right[$ et f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2;\frac{1}{6}\sqrt{6}+2\right]$.

On en déduit le tableau de variation de f

$f(-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2) = 5-\sqrt{6}$ et $f(\frac{1}{6}\sqrt{6}+2) = \sqrt{6}+5$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		2		$\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		∞
			$5-\sqrt{6}$		$\Vert$				
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	
					$\Vert$		$\sqrt{6}+5$		

2. a) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{2x-4} = \dfrac{2ax^2+(2b-4a)x+c-4b}{2(x-2)}$

or $f(x) = \dfrac{6x^2-14x+5}{2x-4}$

Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 6 \\ 2b-4a = -14 \\ -4b+c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 3x-1+\dfrac{1}{2x-4}$.

b) Pour tout $x \in D_f$, $f(x)-(3x-1) = \dfrac{1}{2x-4}$..

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
signe de $2x-4$	$-$ 0 $+$

signe de 2 à droite du zéro

Si $x \le 2$, $f(x)-(3x-1) \le 0$ donc Δ est au-dessus de C ;
Si $x \ge 2$, $f(x)-(3x-1) \ge 0$ donc Δ est au-dessous de C.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[-5;5]$ par $g(x) = -3x^3+7x^2+22x-8$
g est une fonction polynôme donc son ensemble de définition est $D_g = \mathbb{R}$
f est dérivable sur D_g comme fonction polynôme.
$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -9x^2+14x+22$
Recherche des solutions de $-9x^2+14x+22 = 0$:
$\Delta = 14^2 - 4\times 22\times(-9) = 988$
$988 > 0$ donc les solutions de $-9x^2+14x+22$ sont
$x_1 = \dfrac{-14+\sqrt{988}}{2\times(-9)} = \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{9}\sqrt{247}$ et $x_2 = \dfrac{-14-\sqrt{988}}{2\times(-9)} = \dfrac{1}{9}\sqrt{247}+\dfrac{7}{9}$
$-9x^2+14x+22$ est un trinôme du second degré , son signe est celui de a à l'extérieur des racines.
$g(\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\sqrt{247}) = \frac{2900}{243} - \frac{494}{243}\sqrt{247} = -20.016$
$g(\frac{7}{9}+\frac{1}{9}\sqrt{247}) = \frac{494}{243}\sqrt{247} + \frac{2900}{243} = 43.884$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\sqrt{247}$		$\frac{1}{9}\sqrt{247}+\frac{7}{9}$		$+\infty$
signe de $6x^2-24x+23$		$-$	0		0	$-$	
					$\frac{494}{243}\sqrt{247}+\frac{2900}{243}$		
variations de g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$\frac{2900}{243}-\frac{494}{243}\sqrt{247}$				

Exercice 6

1) On répète $n = 2000$ fois la même épreuve de Bernoulli : "choisir un cône".
Cette épreuve a deux issues :
- le succès : "le cône présente un défaut" de probabilité $p = 0,003$.
- l'échec : "le cône ne présente pas de défaut" de probabilité $1-p = 0,997$

Les épreuves sont identiques et indépendantes.
On a donc un schéma de Bernoulli.
La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit
$\boxed{\text{la loi binomiale } \mathbf{B}(2000\ ;\ 0,003)}$.
Autrement dit, $\forall k \in \{0,1,\dots,2000\},\ P(X=k) = \binom{2000}{k}0,003^k 0,997^{2000-k}$
2) Avec la calculatrice, $P(X \le 11) \approx 0,980$
$\boxed{\text{La probabilité qu'un lot ne soit pas échangé est } 0,980}$

Exercice 7 **(intervalle de fluctuation)**

1)

a) $p(X \ge 156) = 1 - p(X \le 155) \approx 0,995$.

b) Donc l'affirmation "employer au moins 156 femmes sur 360 est tout à fait normal. C'est ce qui arrive dans plus de 99% des cas" est vraie. Par contre, la parité homme/femme n'est pas respectée dans cette entreprise.

2) L'intervalle de fluctuation à 95% est $\left[\frac{161}{360}; \frac{199}{360}\right]$ soit $[0,447; 0,553]$.

3) La fréquence observée est dans l'entreprise est $\frac{156}{360}$. $\frac{156}{360} \notin [0,447; 0,553]$ donc, d'après la régle de décision énoncée par la commission européenne, on rejette l'hypothése que la parité est respectée dans cette entreprise avec une probabilité inférieure à $0,05$ de se tromper et l'entreprise est donc en infraction.