

## Feuille de révision 2nde 1ère : Corrigé

### Exercice 1 : Techniques de calculs

1) Calculs et simplification sans calculatrice.

$$A = \frac{\frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{8} \times \frac{3}{1} - \frac{3}{1} \times \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \left(\frac{3}{4} - \frac{6}{5}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{15-24}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{-9}{8}$$

$$B = \frac{3^5 \times 7^4}{21^3} = \frac{3^5 \times 7^4}{3^3 \times 7^3} = 3^2 \times 7^1 = 63 ;$$

$$C = \sqrt{12} - \sqrt{27} + 5\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} + 5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2) a) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée  $(\sqrt{5} + \sqrt{2})$  :

$$A = \frac{1 \times (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5^2 - \sqrt{2}^2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{5-2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}$$

b) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée  $(\sqrt{5} - \sqrt{2})$  :

$$B = \frac{\sqrt{3} \times (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{5-2} = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{3}$$

d) On multiplie le dénominateur par sa forme conjuguée  $(\sqrt{3} + 2)$  :

$$D = \frac{(\sqrt{3} + 2)^2}{(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2)} = \frac{3 + 4\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3^2 - 2^2}} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3-4} = -7 - 4\sqrt{3}.$$

3) a) Cette expression a un sens si et seulement si  $2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$A = \frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1 \times 2x - 3x \times x + 3(x^2+1)}{3 \times 2x} = \frac{2x - 3x^2 + 3x^2 + 3}{6x} = \frac{2x+3}{6x}$$

b) Cette expression a un sens si et seulement si  $3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$$B = \frac{2+x^2}{3x} - \frac{x-1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2+x^2}{3x} - \frac{(x-1)x}{3x} + \frac{1 \times x}{3x} = \frac{2x+2}{3x}.$$

c) Cette expression a un sens si et seulement si  $3x \neq 0$  et  $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $x \neq -1$ .

$$C = \frac{5}{3x} - \frac{2x-1}{x+1} + 2 = \frac{5(x+1)}{3x(x+1)} - \frac{3x(2x-1)}{3x(x+1)} + \frac{2 \times 3x(x+1)}{3x(x+1)} = \frac{5x+5-6x^2+3x+6x^2+6}{3x(x+1)} = \frac{8x+11}{3x(x+1)}$$

### Exercice 2 : Propriétés des fonctions usuelles

1) a) Pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{4} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ . La fonction  $f$  est donc affine.

b) Le coefficient de proportionnalité de  $f$  est positif ( $a = \frac{1}{4} > 0$ ), elle est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

c)  $\frac{x+1}{4} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$  et  $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

Le tableau de signe de  $f(x)$  est donc :

$x$	$-\infty$		$-1$		$+\infty$
Signe $f(x)$		$-$	$0$	$+$	

2) Soit  $g(x) = (x+1)^2 - 4$  pour tout réel  $x$ .

a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$ .

b) D'après la forme canonique de  $g$ , on a  $a = 1$ ,  $\alpha = -1$  et  $\beta = -4$  tel que  $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

Ainsi,  $g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -1]$  à valeurs dans  $[-4; +\infty[$  et strictement croissante sur  $[-1; +\infty[$  à valeurs dans  $[-4; +\infty[$

c) Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x+1)^2 - 4 = (x+1)^2 - 2^2 = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$ .

d) Ci-dessous, le tableau de signe de cette fonction :

$x$	$-\infty$		$-3$		$1$		$+\infty$
Signe $(x-1)$		$-$		$-$	$0$	$+$	
Signe $(x+3)$		$-$	$0$	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	

Ainsi,  $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$ ;  $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in ]-3; 1[$  et  $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$  ou  $x = 1$ .

3) On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0,5; 5]$  par  $h : x \rightarrow x + \frac{2}{x} - 3$ .

a) A l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer le tableau de variations de  $h$  :

$x$	$0,5$		$1,4142$		$5$
	$1,5$				$0,3$
Variations de $h$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$-0,1716$		

b) Soit  $x \in [0,5; 5]$ ,  $h(x) = x + \frac{2}{x} - 3 = \frac{x \times x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3 \times x}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$ .

Or  $(x-1) \times (x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$ .

Donc on a bien :  $h(x) = \frac{(x-1) \times (x-2)}{x}$  pour tout réel  $x \in [0,5; 5]$ .

c) On remarque que :

- ◀ l'expression  $x-1$  est de la forme  $ax+b$  avec  $a=1$  et  $b=1$ . Elle s'annule en 1. De plus,  $a$  est positif ;
- ◀ l'expression  $x-2$  est de la forme  $ax+b$  avec  $a=1$  et  $b=-2$ . Elle s'annule en 2. De plus,  $a$  est positif ;
- ◀  $x$  est positif sur  $[0,5; 5]$ .

On en déduit le tableau de signes de  $h(x)$  sur  $[0,5; 5]$  :

$x$	$0,5$		$1$		$2$		$5$
$x-1$		$-$	$0$	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	$0$	$+$	
$x$		$+$		$+$		$+$	
Signe de $h(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	

d) Résoudre  $h(x) \leq 0$  sur  $[0,5; 5]$ .

D'après le tableau de signe ci-dessus, on obtient  $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 2]$

### Exercice 3 : Etude d'une fonction

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  par  $f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$

On nomme  $(C_f)$  la représentation graphique de  $f$  dans le plan muni d'un repère.

1) Soit  $x \neq 3$ ,  $\frac{1}{3-x} - 2 = \frac{1}{3-x} - \frac{2(3-x)}{3-x} = \frac{1-6+2x}{3-x} = \frac{2x-5}{3-x} = f(x)$ .

2) a) Calculer l'image de  $\sqrt{3}$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}-5}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}-5)(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3}+2 \times 3-5 \times 3-5\sqrt{3}}{9-3} = \frac{-9+\sqrt{3}}{6};$$

L'image de  $\sqrt{3}$  par  $f$  est  $\frac{-9+\sqrt{3}}{6}$ .

b) Résoudre l'équation  $f(x) = 4$

Soit  $x \neq 3$ ,  $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3-x} = 4 \Leftrightarrow 2x-5 = 12-4x \Leftrightarrow 6x = 17 \Leftrightarrow x = \frac{17}{6}$ . Ainsi,  $S = \left\{ \frac{17}{6} \right\}$ .

c) Résoudre l'équation  $f(x) = -2$

Soit  $x \neq 3$ ,  $f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{3-x} - 2 = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{3-x} = 0$ , mais il n'existe aucun réel  $x$  vérifiant cette dernière égalité.  $S = \emptyset$

d) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.

Cela revient à résoudre l'équation :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{3-x} = 0 \Leftrightarrow 2x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$ .

Le seul point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses a pour coordonnées  $(2,5; 0)$ .

e) Déterminer le point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées.

Il suffit de calculer l'image de 0 par  $f$ . En effet,  $f(0) = \frac{2 \times 0 - 5}{3 - 0} = \frac{-5}{3}$ .

Le point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées  $(0; \frac{-5}{3})$ .

f) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $y = 4$ .

D'après b), le seul point d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $y = 4$  a pour coordonnées  $(\frac{17}{6}; 4)$ .

g) Déterminer le point d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $x = \sqrt{3}$ .

D'après a), le seul point d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $x = \sqrt{3}$  a pour coordonnées  $(\sqrt{3}; \frac{-9 + \sqrt{3}}{6})$ .

3) On s'intéresse aux variations de la fonction  $f$  sur  $]3; +\infty[$  :

a) Justifier chaque étape du raisonnement suivant :

$$3 < a \leq b$$

On choisit deux réel  $a$  et  $b$  quelconques tel que  $3 < a \leq b$

$$0 > 3 - a \geq 3 - b$$

On multiplie par  $-1 < 0$ , les inégalités changent de sens puis on ajoute 3

$$\frac{1}{3-a} \leq \frac{1}{3-b} < 0$$

car la fonction inverse  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0[$

$$\frac{1}{3-a} - 2 \leq \frac{1}{3-b} - 2 < 2$$

On rajoute 2 de part et d'autre.

b) On déduit que, si  $3 < a \leq b$  alors  $\frac{1}{3-a} - 2 \leq \frac{1}{3-b} - 2$ , c'est-à-dire  $f(a) \leq f(b)$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $]3; +\infty[$ .

#### Exercice 4

a) La variable  $S$  est la somme des numéros des trois boules à la fin de l'algorithme. Au départ, avant de tirer la première boule, cette somme est forcément nulle.

b) La fonction  $\text{rand}()$  renvoie un nombre aléatoire appartenant à  $[0; 1[$ .

On a donc une chance sur deux que ce nombre soit supérieur à 0,5.

Si  $\text{rand}() > 0,5$ , alors  $S$  augmente de 1 (ligne 4). Cela simule le tirage de la boule 1 dans la première urne. Dans l'autre cas,  $S$  reste égal à 0, comme si l'on avait tiré la boule 0 dans la première urne.

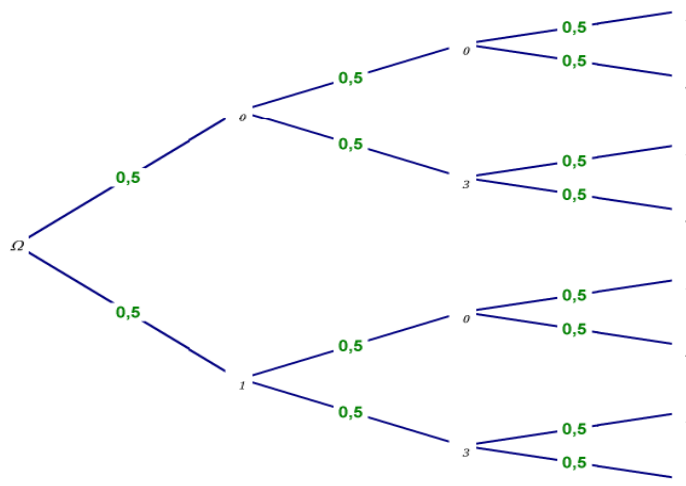
c) De même, les lignes 5 et 6 permettent de simuler le tirage dans la deuxième urne.

En effet, on a une chance sur deux de tirer la boule portant le numéro 3 (ligne 6). Dans l'autre cas,  $S$  reste égal à sa valeur précédente.

d) Les lignes 7 à 10 permettent de simuler le tirage dans la troisième urne. Dans ce cas il y a une instruction "sinon" en plus.

On a une chance sur deux de tirer le 1, donc  $S$  augmente de 1 (ligne 8) et une chance sur deux de tirer le 2, donc  $S$  augmente de 2 (ligne 10).

2) On peut modéliser cette expérience aléatoire par l'arbre suivant :



$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3) Les 8 chemins sont équiprobables. On constate que deux chemins permettent d'obtenir 2 et deux chemins d'obtenir 5. Les autres valeurs ne s'obtiennent que par un seul chemin.

On a donc la loi suivante :

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

### Exercice 5

1)

Etape	$x$	Test $x < 20$ (oui/non)
Initialisation	3	oui
Etape 1	6	oui
Etape 2	12	oui
Etape 3	24	non

2) La valeur affichée est 24.

### Exercice 6 (Uniquement pour les futurs 1S et 1STI)

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(-4; 5)$ ;  $B(-2; 3)$ ;  $C(-2; -1)$  et  $D(3; 3)$ .

a) Pour savoir si les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles, déterminons les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  pour vérifier s'ils sont colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 - (-4, 5) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2, 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que  $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ , donc les  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires. On en déduit que les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles.

b)  $E(7; 14)$  appartient à la droite  $(CD)$  si, et seulement si, les points  $C, D$  et  $E$  sont alignés, autrement dit si, et seulement si, les  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 17 - 3 \\ 14 - 3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$5 \times 11 - 4 \times 14 = 55 - 56 = -1 \neq 0$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont donc pas colinéaires, et par conséquent les points  $C, D$  et  $E$  ne sont pas alignés. Enfin, le point  $E$  n'est pas sur  $(CD)$ .

c) On note  $(x, 0)$  les coordonnées du point  $F$  recherché.

Les droites  $(AC)$  et  $(DF)$  sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{DF}$  sont colinéaires.

$$\text{On a } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2, 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} x - 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{DF}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow 2,5 \times (-3) - (-2) \times (x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 13,5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13,5}{2} = 6,75$ .

Par conséquent, si  $F$  a pour coordonnées  $(6,75; 0)$  alors les droites  $(AC)$  et  $(DF)$  sont parallèles.

### Exercice 7 (Uniquement pour les futurs 1S et 1STI)

Dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 3)$  et  $C(3; -1)$ .

1) On note à chaque fois que c'est nécessaire,  $(x, y)$  les coordonnées du point recherché.

a)  $C'(x, y)$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 - 3 \\ y - 3 = 3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 4 + 3 = 7 \end{cases}, \text{ d'où } C'(1, 7).$$

b)  $D$  image de  $C$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2+2 \\ y+1 = 3-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4+3 = 7 \\ y = 2-1 = 1 \end{cases}$ ,  
d'où  $D(7, 1)$ .

c)  $E$  est tel que  $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$  avec  $\overrightarrow{AB}(4; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3 \times 4 \\ y-1 = 3 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12-2 = 10 \\ y = 6+1 = 7 \end{cases}$ , d'où  $E(10, 7)$ .

d) Si  $J$  est milieu de  $[DC']$ , alors  $x_J = \frac{x_D + x_{C'}}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$  et  $y_J = \frac{y_D + y_{C'}}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$ . soit  $J(4, 4)$ .

2) Pour montrer que  $J$  est le milieu de  $[AE]$ , on peut calculer les coordonnées du milieu de  $[AE]$  et les comparer à celles de  $J$ ; ou bien vérifier que  $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JE}$ .

$\frac{x_A + x_E}{2} = \frac{-2 + 10}{2} = 4 = x_J$  et  $\frac{y_A + y_E}{2} = \frac{1+7}{2} = 4 = y_J$ . Donc  $J$  est bien le milieu de  $[AE]$ .

$[AE]$  et  $[DC']$  ont le même milieu, donc  $ABEC'$  est un parallélogramme.

3) a)  $M(m; 5) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires.

Or  $\overrightarrow{AM}(m+2; 4)$  et  $\overrightarrow{AB}(4; 2)$  et on remarque que  $4 = 2 \times 2$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AM}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow 2(m+2) - 4 \times 4 = 0 \Leftrightarrow m+2 = 8 \Leftrightarrow m = 6$ . D'où  $M(6; 5)$ .

b)  $\overrightarrow{CP}(p+5-3; p+1)$  c'est-à-dire  $\overrightarrow{CP}(p+2; p+1)$

$\overrightarrow{CP}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow (p+2) \times 2 - (p+1) \times 4 = 0 \Leftrightarrow 2p+4 - 4p-4 = 0 \Leftrightarrow -2p = 0 \Leftrightarrow p = 0$ .

D'où  $P(5; 0)$ .

c) Comme  $M \in (AB)$ , alors  $\overrightarrow{BM}$  et  $\overrightarrow{CP}$  sont tous deux colinéaires à  $\overrightarrow{AB}$ ; d'où  $(BM)$  et  $(CP)$  sont parallèles. Ainsi le quadrilatère  $MPCB$  est un trapèze.