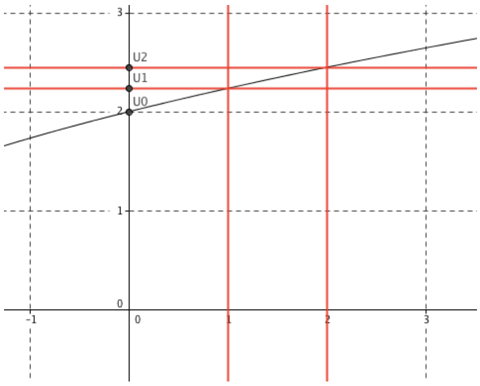
Feuille de révision pour septembre 2018C

Exercice 1



$u_0 = f(0) = \sqrt{0+4} = 2$

$u_1 = f(1) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$u_2 = f(2) = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

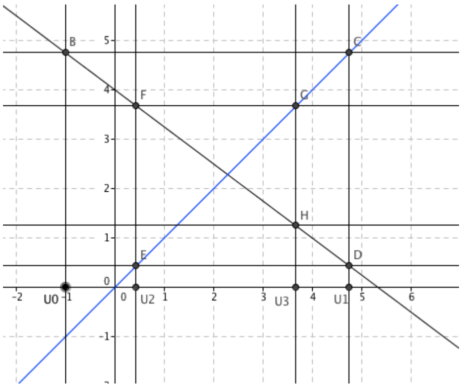
Exercice 2

$u_0 = -1$

$u_1 = f(u_0) = f(-1) = \frac{19}{4}$

$u_2 = f(u_1) = f(\frac{19}{4}) = \frac{7}{16}$

$u_3 = f(u_2) = f(\frac{7}{16}) = \frac{235}{64}$



1)

$u_1 - u_0 = \frac{19}{4} - 1 = \frac{15}{4} > 0$ donc la suite (u_n) n'est pas décroissante.

$u_2 - u_1 = \frac{7}{16} - \frac{19}{4} = -\frac{69}{16} < 0$ donc la suite (u_n) n'est pas croissante.

Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

2)

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3)

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{19}{4}}{-1} = -\frac{19}{4}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{19}{4}} = \frac{7}{76}$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4) Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = f(u_{n-1}) = -\frac{3}{4}u_{n-1} + 4$

Exercice 3

1) a) $u_1 = \frac{1}{2} \times 10 + 7 = \boxed{12}$, $u_2 = \frac{1}{2} \times 12 + 7 = \boxed{13}$, $u_3 = \frac{1}{2} \times 13 + 7 = \boxed{\frac{27}{2}}$

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$ avec $g(x) = \frac{1}{2}x + 7$.

$u_4 = \boxed{\frac{55}{4}}$ $u_5 = \boxed{\frac{111}{8}}$ $u_6 = \boxed{\frac{223}{16}}$

b) $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$ donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

2)

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 14 = \frac{u_n}{2} + 7 - 14 = \frac{1}{2}u_n - 7 = \frac{1}{2}(v_n - 14) = \frac{1}{2}v_n$.

$v_0 = u_0 - 14 = 10 - 14 = -4$

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = -4 \text{ et de raison } q = \frac{1}{2}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 14 = 14 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3)

$S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = -4\frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$ donc $\boxed{S_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8}$

$T_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \underline{\sum_{i=0}^{n} 13 + \sum_{i=0}^{n} v_i} = 14(n+1) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 8$ donc $\boxed{T_n = 14n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 6}$

4)

a) L'algorithme détermine pour quelle valeur de n, on a $abs(u_n - 14) \leq P$.

b) Soit $P = 1$.

	n	u	test $abs(u - 14) > P$
	0	10	oui
étape 1	1	12	oui
étape 2	2	13	oui
étape 3	3	13,5	non

Exercice 4

1. a) f est définie, pour tout réel x tel que $2x - 4 \neq 0$ donc son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

f est dérivable sur D_f comme fonction rationnelle.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$_, $f'(x) = \frac{(12x - 14)(2x - 4) - 2(6x^2 - 14x + 5)}{(2x - 4)^2} = \frac{6x^2 - 24x + 23}{(2x - 4)^2}$

Recherche des solutions de $6x^2 - 24x + 23 = 0$ ou recherche des racines de $6x^2 - 24x + 23$

$\Delta = 24^2 - 4 \times 6 \times 23 = 24$

24 > 0 donc les racines de $6x^2 - 24x + 23$ sont

$x_1 = \frac{24 + \sqrt{24}}{2 \times 6} = \frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$ et $x_2 = \frac{24 - \sqrt{24}}{2 \times 6} = -\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$

<u>$6x^2 - 24x + 23$ est un trinôme du second degré , son signe est celui de a à l'extérieur des racines..</u>

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$		2		$\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2$		$+\infty$
signe de $6x^2 - 24x + 23$		+	0	−		−	0	+	
signe de $(2x - 4)^2$		+		+		+		+	
signe de $f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

Donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2\right]$ et $\left[\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2\,;\ +\infty\right[$ et f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{6}\sqrt{6} + 2; \frac{1}{6}\sqrt{6} + 2\right]$.

On en déduit le tableau de variation de f

$f(-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2) = 5-\sqrt{6}$ et $f(\frac{1}{6}\sqrt{6}+2) = \sqrt{6}+5$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		2		$\frac{1}{6}\sqrt{6}+2$		∞
			$5-\sqrt{6}$		$\|$				
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
					$\|$		$\sqrt{6}+5$		

2. a) Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = ax+b+\frac{c}{2x-4} = \frac{2ax^2+(2b-4a)x+c-4b}{2(x-2)}$

or $f(x) = \frac{6x^2-14x+5}{2x-4}$

Par identification, on obtient $\begin{cases} 2a = 6 \\ 2b-4a = -14 \\ -4b+c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc pour tout $x \in D_f$, $f(x) = 3x-1+\frac{1}{2x-4}$.

b) Pour tout $x \in D_f$, $f(x)-(3x-1) = \frac{1}{2x-4}$..

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
signe de $2x-4$	$-$	0	$+$	signe de 2 à droite du zéro

Si $x \leq 2$, $f(x)-(3x-1) \leq 0$ donc Δ est au-dessus de C ;

Si $x \geq 2$, $f(x)-(3x-1) \geq 0$ donc Δ est au-dessous de C.

Exercice 5

Soit g la fonction définie sur $[-5;5]$ par $g(x) = -3x^3+7x^2+22x-8$

g est une fonction polynôme donc son ensemble de définition est $D_g = \mathbb{R}$

f est dérivable sur D_g comme fonction polynôme.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -9x^2+14x+22$

Recherche des solutions de $-9x^2+14x+22 = 0$:

$\Delta = 14^2-4\times 22\times(-9) = 988$

$988 > 0$ donc les solutions de $-9x^2+14x+22$ sont

$x_1 = \frac{-14+\sqrt{988}}{2\times(-9)} = \frac{7}{9}-\frac{1}{9}\sqrt{247}$ et $x_2 = \frac{-14-\sqrt{988}}{2\times(-9)} = \frac{1}{9}\sqrt{247}+\frac{7}{9}$

$-9x^2+14x+22$ est un trinôme du second degré , son signe est celui de a à l'extérieur des racines.

$g(\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\sqrt{247}) = \frac{2900}{243}-\frac{494}{243}\sqrt{247} = -20,016$

$g(\frac{7}{9}+\frac{1}{9}\sqrt{247}) = \frac{494}{243}\sqrt{247}+\frac{2900}{243} = 43,884$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\sqrt{247}$		$\frac{1}{9}\sqrt{247}+\frac{7}{9}$		$+\infty$
signe de $6x^2-24x+23$		$-$	0		0	$-$	
					$\frac{494}{243}\sqrt{247}+\frac{2900}{243}$		
variations de g		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$\frac{2900}{243}-\frac{494}{243}\sqrt{247}$				

Exercice 6

1) On répète $n = 2000$ fois la même épreuve : "choisir un cône".

Cette épreuve a deux issues :

- le succès : "le cône présente un défaut" de probabilité $p = 0,003$.

- l'échec : "le cône ne présente pas de défaut" de probabilité $1 - p = 0,997$
Les épreuves sont identiques et indépendantes.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit $\boxed{\text{la loi binomiale } \mathbf{B}(2000\ ;\ 0,003)}$.

Autrement dit, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2000\}$, $P(X = k) = \binom{2000}{k} 0,003^k 0,997^{2000-k}$

2) Avec la calculatrice, $P(X \leq 11) \approx 0,980$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un lot ne soit pas échangé est } 0,980}$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

dans $\mathbb{R}$ $\quad S = \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

dans $]-\pi;\pi]$ $\quad S = \left\{\frac{-\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

b) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{2\pi}{5}) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{20} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{20} + 2k\pi \quad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

dans $\mathbb{R}$ $\quad S = \left\{\frac{3\pi}{20} + 2k\pi; \frac{7\pi}{20} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$

dans $]-\pi;\pi]$ $\quad S = \left\{\frac{3\pi}{20}; \frac{7\pi}{20}\right\}$

c) $2\sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\frac{-\pi}{6}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi$ ou
$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad avec\ \ k \in \mathbb{Z}$

dans $]-\pi;\pi]$ $\quad S = \left\{\frac{-\pi}{6}; \frac{-5\pi}{6}\right\}$

Exercice 8

1. On considère, sur un cercle trigonométrique le point M image du nombre réel x tel que :
$-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$ et $\cos(x) = \frac{-3}{7}$

Pour tout réel x on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ donc $|\sin(x)| = \sqrt{1 - \left(\frac{-3}{7}\right)^2} = \frac{2}{7}\sqrt{10}$ or $-\pi < x \leq -\frac{\pi}{2}$
donc son sinus est négatif et on a $\sin(x) = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$

2. Donner la valeur exacte de :

a) $\sin(\pi - x) = \sin(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{10}$

b) $\sin(-x) = -sin(x) = \frac{2}{7}\sqrt{10}$

c) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{10}$

d) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x) = \frac{-3}{7}$

e) $\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = \frac{-3}{7}$