Spécialité Mathématiques
Feuille de révisions de la première à la terminale
Corrigé

Exercice 1

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :

- S l'évènement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'évènement « le voyageur porte un objet métallique ».

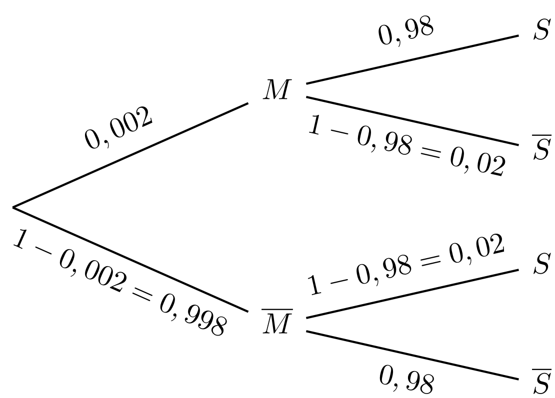
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :

- Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a. D'après l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0,002$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$.

b. L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



c. D'après la formule des probabilités totales :
$P(S) = P(S \cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right) = P_M(S) \times P(M) + P_{\overline{M}}(S) \times P\left(\overline{M}\right) = 0,002 \times 0,98 + 0,998 \times 0,02 =$ 0,021 92.

d. Par définition : $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P_M(S) \times P(M)}{P(S)} = \dfrac{0,002 \times 0,98}{0,02192} \approx 0,089$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 - 25x + 28$

1. Quelle est l'image de 1 par f ?
$f(1) = 1^3 - 41^2 - 25 + 28 = 0$

2. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-1)(ax^2+bx+c) &= ax^3+bx^2+cx-(ax^2+bx+c)\\ &= ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x+c\end{aligned}$$

Par identification : $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b-a &=& -4\\ c-b &=& -25\\ -c &=& 28\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b &=& -4+1\\ c-b &=& -25\\ c &=& -28\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1\\ b &=& -3\\ c &=& -28\end{array}\right.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = (x-1)(x^2-3x-28)$
Donc : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $x^2-3x-28 = 0$
On veut résoudre $x^2-3x+28 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-28)$
$\Delta = 121$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $x^2-3x+28$ a deux racines.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{121}}{2\times 1}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{121}}{2\times 1}$

$x_1 = -4$ $\qquad$ $x_2 = 7$

On a donc $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$ ou $x = 7$

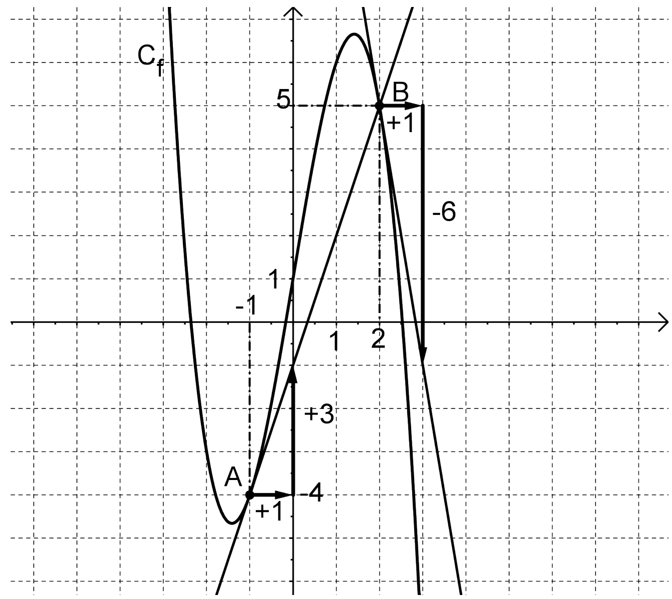
$\boxed{S = \{-4\ ;\ 1\ ;\ 7\}}$

4. Donner l'expression factorisée de f .

Pour $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = (x-1)(x^2-3x-28)$
$f(x) = (x-1) \times a \times (x-x_1) \times (x-x_2)$
$f(x) = (x-1)(x+4)(x-7)$

Exercice 3

Voici la représentation graphique C_f d'une fonction f.
A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives -1 et 2.
T_1 et T_2 sont les tangentes à C_f en A et B.



1. $\boxed{f(-1) = -4 \text{ et } f(2) = 5}$.

2. $\boxed{f'(-1) = 3}$: coefficient directeur de T_1

$\boxed{f'(2) = -6}$: coefficient directeur de T_2

3. T_1 a pour coefficient directeur 3 et pour ordonnée à l'origine -1.
Donc $\boxed{T_1 : y = 3x - 1}$

$T_2 : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$T_2 : y = -6(x-2) + 5$
$T_2 : y = -6x + 12 + 5$
$\boxed{T_2 : y = -6x + 17}$

4. B a pour coordonnées $(2; 5)$
or $y = 3 \times 2 - 1 = 5 = y_B$
Donc les coordonnées de B vérifient l'équation de T_1 donc le point B appartient à la droite T_1.

Exercice 4

Déterminer le tableau de variation de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 3 \quad$ pour $x \in [-10\ ;\ 10]$

f est dérivable sur $[-10\ ;\ 10]$ comme fonction polynôme.
Pour $x \in [-10\ ;\ 10]$, $f'(x) = 2x - 8$

C'est une fonction affine : $\dfrac{-b}{a} = 4$ est le séparateur.
$a = 2$ est positif donc :

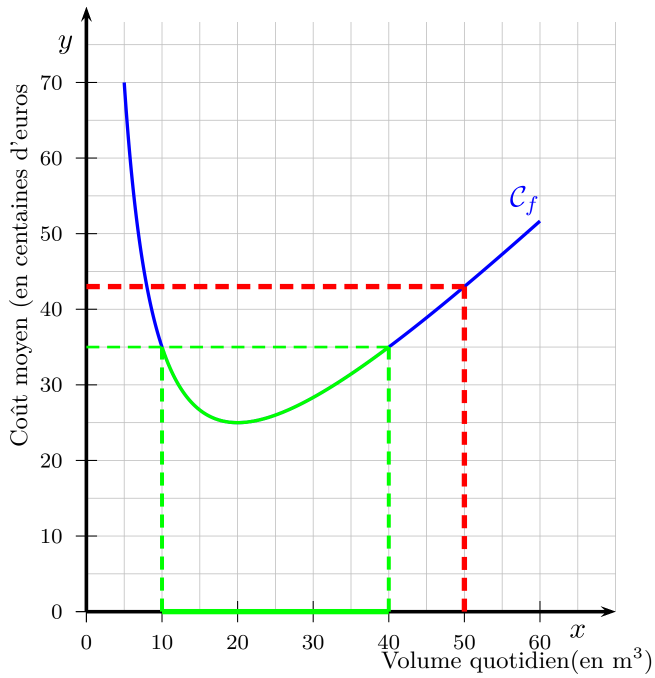
x	-10		4		10
signe $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	183	$\searrow$	-13	$\nearrow$	23

Exercice 5

Une entreprise fabrique un engrais biologique liquide.
Chaque jour, le volume d'engrais liquide fabriqué est compris entre $5\,\mathrm{m}^3$ et $60\,\mathrm{m}^3$.
Le coût moyen quotidien de production (exprimé en centaine d'euros) de cet engrais est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[5\,;60]$ par :

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère ci-dessous :



PARTIE A

1. Quel est le coût moyen quotidien pour la production de 50 m^3 d'engrais ?

   $f(50) = 50 - 15 + \dfrac{400}{50} = 43$ donc le coût moyen quotidien pour la production de 50 m^3 d'engrais est de 4 300 €.

   Remarque : on peut vérifier graphiquement la validité du calcul (pointillés rouges)

2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen quotidien de production inférieur ou égal à 3 500 € ?

   On cherche à résoudre $f(x) \leqslant 35$

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant 35 &\iff x - 15 + \frac{400}{x} \leqslant 35 \\ &\iff x + \frac{400}{x} - 50 \leqslant 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 50x + 400}{x^2} \leqslant 0 \\ &\iff x^2 - 50x + 400 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   Étude de $x^2 - 50x + 400$:

   $\Delta = b^2 - 4ac = 900 = 30^2 > 0$ donc l'équation $x^2 - 50x + 400 = 0$ admet 2 solutions $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 10 \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 40 \end{cases}$

   On en déduit le tableau de signes suivant :

x	5		10		40		60
signe de $x^2 - 50x + 400$		$+$	0	-	0	$+$	

Il faut donc fabriquer entre $10\,\text{m}^3$ et $40\,\text{m}^3$ d'engrais pour que le coût moyen quotidien de production soit inférieur ou égal à 3 500 €

Remarque : on peut vérifier graphiquement la validité du calcul (pointillés verts)

PARTIE B

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[5\,;\,60]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$.

f est dérivable sur l'intervalle l'intervalle $[5\,;\,60]$ comme somme de fonctions dérivables.

Pour $x \in [5\ ;\ 60]$,

$$f(x) = x - 15 + \frac{400}{x} = x - 15 + 400 \times \frac{1}{x} \text{ donc } f'(x) = 1 + 400 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

2. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,60]$.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$ est du signe de $x^2 - 400$ sur $[5\,;\,60]$ car $x^2 > 0$.
Or on a $x^2 - 400 = x^2 - 20^2 = (x - 20)(x + 20)$. On en déduit le tableau de signes :

x	5		20		60
signe de $x^2 - 400$		-	0	+	

On en déduit les variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,60]$.

x	5		20		60
signe de $f'(x)$		-	0	+	
variations f	70	$\searrow$	25	$\nearrow$	$f(60)$

3. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen quotidien de production est-il minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?
Le coût moyen quotidien de production est minimal pour $20\,\text{m}^3$ d'engrais produit et ce coût est de 2 500 €.

Exercice 6

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ $\qquad$ $\boxed{\textbf{b.}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}}$ $\qquad$ **c.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ $\qquad$ **d.** e^{a}

2. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

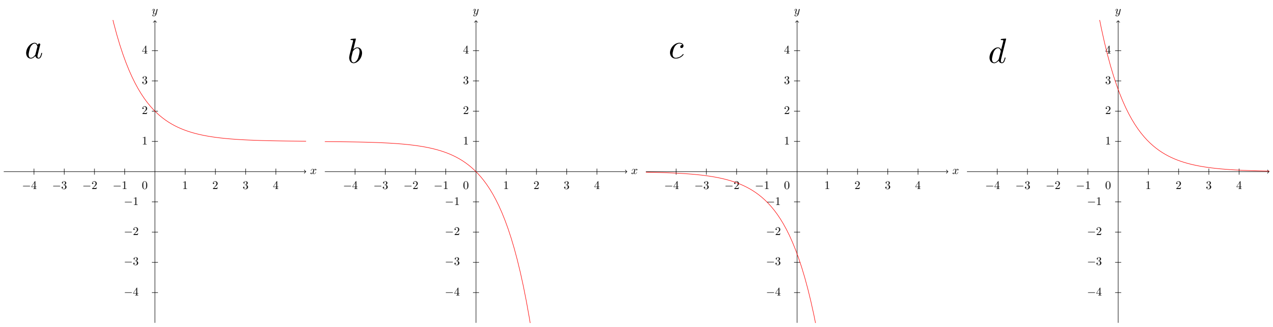
$\boxed{\textbf{a.}\ \sqrt{\mathrm{e}^{a}}}$ $\qquad$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ $\qquad$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ $\qquad$ **d.** $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel a, l'expression $\dfrac{2\mathrm{e}^{a-1}}{(\mathrm{e}^a)^2}$ est égale à :

a. 1 **b.** $2\mathrm{e}^{3a-1}$ **c.** e^{-2} $\boxed{\textbf{d.}\ \dfrac{2}{\mathrm{e}^{a+1}}}$

4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x+1}$. Quelle est la représentation graphique de f ?

$\boxed{\text{Réponse d : } f(0) = e^1}$



5. L'arrondi au centième de la somme $1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + \cdots + 1{,}2^{10}$ est :
C'est la somme d'une suite géométrique de raison q=1,2.
$1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^3 + \cdots + 1{,}2^{10} = \dfrac{1-(1{,}2)^{1}1}{1-1{,}2} \approx 32,15$

a. $3,27$ **b.** $25,96$ **c.** $26,96$ $\boxed{\textbf{d.}\ 32,15}$

Exercice 7

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1er juin 2018.
À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n-ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. a. Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc
$u_1 = 35$.

b. $u_2 = 0{,}75 \times 35 + 20 = 46{,}25$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 20$.
On considère l'algorithme suivant :

```
U ⟵ 20
N ⟵ 0
Tant que U < 70
        U ⟵ 0,75 × U + 20
        N ⟵ N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

a. On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	67,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$; donc au bout du 7e mois la somme disponible sera pour la première fois supérieure à 70 euros.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 80$.

a. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 80 \\ &= 0,75 \times u_n + 20 - 80 \\ &= 0,75 \times u_n - 60 \\ &= 0,75\left(u_n - \frac{60}{0,75}\right) \\ &= 0,75 \times (u_n - 80) \\ &= 0,75 \times v_n\ . \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.

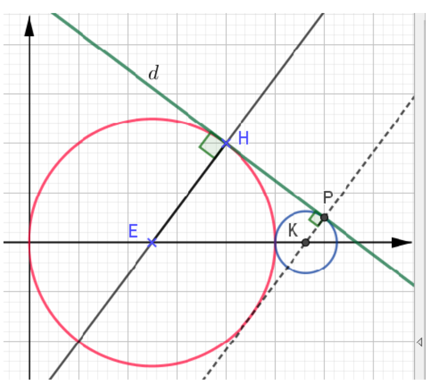
b. $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.

c. Pour tout entier naturel n,
$v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0,75^n$.
De plus, $u_n = v_n + 80 = -60 \times 0,75^n + 80 = 80 - 60 \times 0,75^n$.

d. Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1er juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 12$: $u_{12} = 80 - 60 \times 0,75^{12} \approx 78,10$.
Maya aura dans sa tirelire le 1er juin 2019 78,10 €.

Exercice 8

1)



2) $\overrightarrow{EH}\,(3;4)$ est un vecteur normal à d, donc une équation cartésienne de d s'écrit :
$3x + 4y + c = 0$, avec c un réel à préciser. En plus $H \in d$, donc $3 \times 8 + 4 \times 4 + c = 0$, soit $c = -40$. Enfin, $d : 3x + 4y - 40 = 0$.

3) C_1 est le cercle de centre E passant par H, donc de rayon $EH = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

$$\begin{aligned} M\,(x;y) \in C_1 &\iff (x-5)^2 + (y-0)^2 = 25 \\ &\iff x^2 + y^2 - 10x = 0 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} x^2 - 22,5x + y^2 + 125 = 0 &\iff (x - 11,25)^2 - 11,25^2 + (y-0)^2 + 125 = 0 \\ &\iff (x - 11,25)^2 + (y-0)^2 = 1,25^2 \end{aligned}$$

le cercle C_2 a pour centre $K(11,25;0)$ et pour rayon $1,25$.

5) Un point $M(x;y)$ est situé sur les deux cercles C_1 et C_2 si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanémment le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2-10x=0 \\ x^2+y^2-22,5x+125=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=10x \\ 10x-22,5x=-125 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=10\times 10-10^2 \\ x=\frac{-125}{-12,5}=10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y^2=0 \\ x=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=10 \end{array}\right.$$

Le seul point d'intersection est de coordonnées $(10;0)$.

6) On note P le projeté orthogonal de K sur d.

a) Déterminons une équation cartésienne de (PK) de vecteur directeur $\overrightarrow{EH}\,(3;4)$: $4x-3y+c=0$, avec c un réel. Or $K\in(PK)$, donc $4\times 11,25-3\times 0+c=0$, soit $c=-45$. Enfin, (PK) : $4x-3y-45=0$.

$$P(x;y)\in d\cap(PK) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+4y-40=0 \\ 4x-3y-45=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 9x+12y=120 \\ 16x-12y=180 \end{array}\right. \text{(on mulltiplie L}_1 \text{ par 3 et L}_2 \text{ par 4)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{40-3x}{4} \\ 25x=300 \end{array}\right. \text{(on additionne L}_1 \text{ et L}_2 \text{ membre à membre)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=\frac{40-3\times 12}{4}=1 \\ x=12 \end{array}\right. \text{. Soit } P(12;1)$$

b) La distance du point K à la droite d est $KP=\sqrt{(12-11.25)^2+(1-0)^2}=1.25$.

c) On sait que d est perpendiculaire à $[KP]$ en P ainsi que $[KP]$ est un rayon du cercle C_2 (d'après **b),** donc d est la tangente en P à C_2. D'où le résultat.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$
On donne les points $A\,(2;-1)$, $B\,(-2;3)$ et $C\,(-1;-2)$

1) On clacule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières, et après identification, on isole le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$:
D'une part, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\begin{array}{c}-4\\4\end{array}\right).\left(\begin{array}{c}-3\\-1\end{array}\right)=12-4=8$, et d'autre part
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\sqrt{(-4)^2+4^2}\times\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, soit
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=4\sqrt{20}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Ainsi, $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\frac{8}{4\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{20}}$, on obtient par par la calculatrice $\widehat{BAC}\approx 63°$.

2) La mesure de l'aire de ABC s'écrit $S=\dfrac{1}{2}AB\times AC\times\sin\left(\widehat{BAC}\right)$, soit
$S=2\sqrt{20}\times\sin(63)\approx 8$.

3) On utilise la relation de Chasles en introduisant le point I milieu de $[AB]$

$$\begin{aligned} M\in \mathrm{E} &\iff MA^2+MB^2=10 \\ &\iff \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=10 \\ &\iff 2MI^2+2IB^2=20,\text{ car } \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB},\text{ donc } \overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{IB}^2 \text{ et } 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=0 \\ &\iff MI^2=\frac{20-2\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2},\text{ car } IB=\frac{AB}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} \\ &\iff MI^2=2 \\ &\iff MI=\sqrt{2} \qquad (\text{car } MI>0) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{E est le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{2}.}$

Exercice 10

<u>`Partie A`</u>

1) On a $P(S) = \dfrac{1}{2}$ et $P_S(B) = \dfrac{3}{4}$, ainsi $P(B \cap S) = P(S) \times P_S(B)$, soit $P(B \cap S) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$.

2) Les événements S et $\overline{S}$ forment un système complet d'événements de l'univers, ainsi : $P(B) = P(S) \times P_S(B) + P(\overline{S}) \times P_{\overline{S}}(B) = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{6}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16}$.
La probabilité que le groupe de copains réponde correctement à la question posée est $7/16$.

3) On a d'une part $P(B \cap S) = 3/8$, et d'autre part $P(S) \times P(B) = 1/2 \times 7/16 = 7/32$.
Ainsi $P(B \cap S) \neq P(S) \times P(B)$, les événements S et B ne sont donc pas indépendants.

<u>`Partie B`</u>

1) Loi de probabilité de X :
Le support de X est $X(\Omega) = \{-5\,;5\,;25\}$.
$P(X = 5) = P(B \cap S) = 3/8$; $P(X = 25) = P(B \cap \overline{S}) = 1/2 \times 1/8 = 1/16$ et
$P(X = -5) = P(\overline{B} \cap S) + P(\overline{B} \cap \overline{S})$, soit $P(X = -5) = 1/8 + 7/16 = 9/16$.

On consigne les résultats dans le tableau ci-contre :

x	-5	5	25
$P(X = x)$	$9/16$	$3/8$	$1/16$

2) La fonction Jeu retourne l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, soit $E(X) = 0,625$.