Merci de faire part de toute faute, remarque ou erreur de typographie à th.mainguy@gmail.com

1 Calculs

Exercice 1

$$A = \frac{17}{27} \quad B = \frac{37}{36} \quad C = -\frac{47}{36} \quad D = \frac{6}{35}$$

$$E = \frac{2}{3} \quad F = \frac{1}{7} \quad G = \frac{31}{15} \quad H = \frac{5}{2}$$

$$I = -\frac{1}{3} \quad J = -\frac{5}{3} \quad K = \frac{11}{18} \quad L = \frac{17}{12}$$

$$M = -1 \quad N = \frac{22}{21} \quad O = -\frac{1}{4} \quad P = \frac{4}{5}$$

$$Q = \frac{4}{3} \quad R = -\frac{11}{18} \quad S = -9 \quad T = \frac{3}{5}$$

Exercice 2

$$A = \frac{-13x^2+22x-3}{4-3x} \quad B = \frac{-8x^2+24x-14}{2x-5} \quad C = \frac{3x^2+8x-3}{(2x+1)(x-2)} \quad D = \frac{-3x^2+16x+15}{(x+2)(3x-1)}$$

$$E = \frac{5x^2+17x+19}{(x+2)^2} \quad F = \frac{12x^2-10x-5}{(2x-1)^2} \quad G = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad H = \frac{1}{x^2-1}$$

Exercice 3

$$A = \frac{1}{5} \quad B = \frac{11}{9} \quad C = \frac{25}{32} \quad D = a(a+b)^2$$

$$E = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} \quad F = \frac{3}{2}n(n+1) \quad G = \sqrt{ab} \quad H = \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$I = 2^{n+1} \quad J = 2^{2^{2n}} \quad K = 2^n \quad L = 2^{2^{n+1}}$$

$$M = \frac{3^9}{2^6\times 5^{20}} \quad N = \frac{3^{15}\times 5^3}{2^9} \quad O = \frac{10^6}{3^{12}} \quad P = -\frac{2^{24}}{5^6\times 3^{12}}$$

$$Q = \frac{a^4}{c^3} + \frac{a^3}{bc^2} \quad R = \frac{b^{17}}{a^9c^5} \quad S = \frac{1}{2} \quad T = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

$$U = 1 \quad V = \frac{1}{1-\mathrm{e}^a} \quad W = 1 \quad X = \frac{ax}{b+x}$$

2 Trinômes

Exercice 4

a)

$$A = 24x^2 + 38x + 15 \quad B = -6x^2 + 29x - 28 \quad C = -12x^2 + 17x + 45$$

$$D = 6x^2 + 8x - 62 \quad E = 12x^2 + 17x - 7 \quad F = 35x^2 - 20x - 2$$

$$G = 5x^2 + 9 \quad H = -46x^2 + 5x + 67 \quad I = 11x - 16$$

b)

$$A = x^2 + 14x + 49 \quad B = y^2 - 18y + 81 \quad C = 9x^2 + 30x + 35$$

$$D = 4x^2 - 12x + 9 \quad E = x^2 - 64 \quad F = 16x^2 - 25$$

$$G = 4x^2 - 8x + 17 \quad H = -11x^2 + 32x + 9 \quad I = -8x^2 + 42x - 65$$

$$J = -31x^2 + 3x + 39 \quad K = 7x^2 + 52x + 14 \quad L = 22x^2 - 3x - 6$$

Exercice 5

$A)x = 3 + \sqrt{6}$ ou $x = 3 - \sqrt{6}$ $\quad B)$ pas de solution $\quad C)x = -\frac{2}{5}$

$D)x = 5$ $\quad E)x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{5}{3}$ $\quad F)$ pas de solution

$G)x = 0$ ou $x = \frac{11}{3}$ $\quad H)x = -1 - \sqrt{3}$ ou $x = -1 + \sqrt{3}$ $\quad I)x = 0$ ou $x = 2$

Exercice 6

$A)[1,4]$ $\quad B)\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$ $\quad C)$ pas de solution

$D)\mathbb{R}$ $\quad E)\mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$ $\quad F)\left\{-\frac{2}{5}\right\}$

$G)\left]-1-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]-1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ $\quad H)]-\infty, -1[$ $\quad I)]-\infty, -1] \cup \left[0, \frac{5}{3}\right]$

Exercice 7

a)

$$A=(x-1)(x-4) \quad B=6\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) \quad C=2\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D=(x-1)^2 \quad E=(x+1)^2 \quad F=(x-1)(x+1)$$

$$G=(x+3)^2 \quad H=(x-7)^2 \quad I=(x-5)(x+5)$$

$$J=(3x-5)^2 \quad K=(4x+3)^2 \quad L=(2x-5)(2x+5)$$

b)

$$A=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \quad B=(\sqrt{3a}+b)^2 \quad C=(a-4xy)(a+4xy)$$

$$D=(a+x)(a+y) \quad E=(a+x)(b+y) \quad F=(2a+3b)^2$$

$$G=(x+y+2)^2 \quad H=(3-(a-b)^2)^2 \quad I=(a+b+c)^2$$

$$J=(a+b+c)^2 \quad K=(1-x^2)^2 \quad L=(x-m)(mx-1)$$

3 Inégalités

Exercice 8

a) $A \leqslant B$

b) $A \leqslant B$

c) $A \leqslant B$ si $x \in [-1,1], A \geqslant B$ sinon

d) $A \geqslant B$ si $x \in [1,\mathrm{e}], A \leqslant B$ sinon (avec toujours $x>0$)

e) $A \leqslant B$ si $x \in [-\infty,-3] \cup]-\frac{2}{3},0[, A \geqslant B$ sinon

f) $A \leqslant B$ si $x \in]-\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}], A \geqslant B$ sinon (avec toujours $x>0$ et $x \neq \frac{1}{\mathrm{e}}$)

4 Étude de fonctions

Exercice 9

a) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)=3x^2 \text{ et } f''(x)=6x.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x + 2 \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.

d) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ comme fonction quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}, f'(x) = -\frac{26}{(5x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{260}{(5x-2)^3}$$

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

f est concave sur $]-\infty, \frac{2}{5}[$, convexe sur $]\frac{2}{5}, +\infty[$.

e) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

f) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables (la fraction ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)^2}$$

x	0		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	12	$\searrow$	$\ln(4)+\frac{21}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

g) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} \text{ et } f''(x) = 4\mathrm{e}^{-2x} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.

h) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$.

i) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}$.

j) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1 + \mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^3}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty$

f est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

k) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$		$+$		
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

l) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \text{ et } f''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$			$-$		0		$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$			0			$\searrow$	0

f est convexe sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$, concave sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.