

Merci de faire part de toute faute, remarque ou erreur de typographie à th.mainguy@gmail.com

1 Calculs

Exercice 1

$$A = \frac{17}{27} \quad B = \frac{37}{36} \quad C = -\frac{47}{36} \quad D = \frac{6}{35}$$

$$E = \frac{2}{3} \quad F = \frac{1}{7} \quad G = \frac{31}{15} \quad H = \frac{5}{2}$$

$$I = -\frac{1}{3} \quad J = -\frac{5}{3} \quad K = \frac{11}{18} \quad L = \frac{17}{12}$$

$$M = -1 \quad N = \frac{22}{21} \quad O = -\frac{1}{4} \quad P = \frac{4}{5}$$

$$Q = \frac{4}{3} \quad R = -\frac{11}{18} \quad S = -9 \quad T = \frac{3}{5}$$

Exercice 2

$$A = \frac{-13x^2+22x-3}{4-3x} \quad B = \frac{-8x^2+24x-14}{2x-5} \quad C = \frac{3x^2+8x-3}{(2x+1)(x-2)} \quad D = \frac{-3x^2-16x+15}{(x+2)(3x-1)}$$

$$E = \frac{5x^2+17x+19}{(x+2)^2} \quad F = \frac{12x^2-10x-5}{(2x-1)^2} \quad G = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad H = \frac{1}{x^2-1}$$

Exercice 3

$$A = \frac{1}{5} \quad B = \frac{11}{9} \quad C = \frac{25}{32} \quad D = a(a+b)^2$$

$$E = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} \quad F = \frac{3}{2}n(n+1) \quad G = \sqrt{ab} \quad H = \frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}$$

$$I = 2^{n+1} \quad J = 2^{2n} \quad K = 2^n \quad L = 2^{2^{n+1}}$$

$$M = \frac{3^9}{2^6 \times 5^{20}} \quad N = \frac{3^{15} \times 5^3}{2^9} \quad O = \frac{10^6}{3^{12}} \quad P = -\frac{2^{24}}{5^6 \times 3^{12}}$$

$$Q = \frac{a^4}{c^3} + \frac{a^3}{bc^2} \quad R = \frac{b^{17}}{a^9 c^5} \quad S = \frac{1}{2} \quad T = \ln\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

$$U = 1 \quad V = \frac{1}{1-e^a} \quad W = 1 \quad X = \frac{ax}{b+x}$$

2 Trinômes

Exercice 4

a)

$$A = 24x^2 + 38x + 15 \quad B = -6x^2 + 29x - 28 \quad C = -12x^2 + 17x + 45$$

$$D = 6x^2 + 8x - 62 \quad E = 12x^2 + 17x - 7 \quad F = 35x^2 - 20x - 2$$

$$G = 5x^2 + 9 \quad H = -46x^2 + 5x + 67 \quad I = 11x - 16$$

b)

$$A = x^2 + 14x + 49 \quad B = y^2 - 18y + 81 \quad C = 9x^2 + 30x + 25$$

$$D = 4x^2 - 12x + 9 \quad E = x^2 - 64 \quad F = 16x^2 - 25$$

$$G = 4x^2 - 8x + 17 \quad H = -11x^2 + 32x + 9 \quad I = -8x^2 + 42x - 65$$

$$J = -31x^2 + 3x + 39 \quad K = 7x^2 + 52x + 14 \quad L = 22x^2 - 3x - 6$$

Exercice 5

$$A) x = 3 + \sqrt{6} \text{ ou } x = 3 - \sqrt{6} \quad B) \text{ pas de solution} \quad C) x = -\frac{2}{5}$$

$$D) x = 5 \quad E) x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{5}{3} \quad F) \text{ pas de solution}$$

$$G) x = 0 \text{ ou } x = \frac{11}{3} \quad H) x = -1 - \sqrt{3} \text{ ou } x = -1 + \sqrt{3} \quad I) x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Exercice 6

$$A) [1, 4] \quad B) \left] -\infty, \frac{1-\sqrt{21}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{21}}{2}, +\infty \right[\quad C) \text{ pas de solution}$$

$$D) \mathbb{R} \quad E) \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{4}{3} \right\} \quad F) \left\{ -\frac{2}{5} \right\}$$

$$G) \left] -1 - \sqrt{2}, 0 \right[\cup \left] -1 + \sqrt{2}, +\infty \right[\quad H) \left] -\infty, -1 \right[\quad I) \left] -\infty, -1 \right[\cup \left[0, \frac{5}{3} \right]$$

Exercice 7

a)

$$A = (x-1)(x-4) \quad B = 6\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad C = 2\left(x - \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D = (x-1)^2 \quad E = (x+1)^2 \quad F = (x-1)(x+1)$$

$$G = (x+3)^2 \quad H = (x-7)^2 \quad I = (x-5)(x+5)$$

$$J = (3x-5)^2 \quad K = (4x+3)^2 \quad L = (2x-5)(2x+5)$$

b)

$$A = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) \quad B = (\sqrt{3a} + b)^2 \quad C = (a - 4xy)(a + 4xy)$$

$$D = (a+x)(a+y) \quad E = (a+x)(b+y) \quad F = (2a+3b)^2$$

$$G = (x+y+2)^2 \quad H = (3 - (a-b)^2)^2 \quad I = (a+b+c)^2$$

$$J = (a+b+c)^2 \quad K = (1-x^2)^2 \quad L = (x-m)(mx-1)$$

3 Inégalités*Exercice 8*a) $A \leq B$ b) $A \leq B$ c) $A \leq B$ si $x \in [-1, 1]$, $A \geq B$ sinond) $A \geq B$ si $x \in [1, e]$, $A \leq B$ sinon (avec toujours $x > 0$)e) $A \leq B$ si $x \in [-\infty, -3] \cup]-\frac{2}{3}, 0[$, $A \geq B$ sinonf) $A \leq B$ si $x \in]-\frac{1}{e}, e]$, $A \geq B$ sinon (avec toujours $x > 0$ et $x \neq \frac{1}{e}$)**4 Étude de fonctions***Exercice 9*a) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 \text{ et } f''(x) = 6x.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	

f est concave sur \mathbb{R}_- , convexe sur \mathbb{R}_+ .

b) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x + 2 \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

f est convexe sur \mathbb{R} .

c) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x \text{ et } f''(x) = 2 > 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 1 \nearrow	$+\infty$

f est convexe sur \mathbb{R} .

d) f est définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}$ comme fonction quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{5}\}, f'(x) = -\frac{26}{(5x-2)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{260}{(5x-2)^3}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	
$f'(x)$	$-$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow $-\infty$	$+\infty$

f est concave sur $] -\infty, \frac{2}{5}[$, convexe sur $]\frac{2}{5}, +\infty[$.

e) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

f est concave sur \mathbb{R}_+^* .

f) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R}_+^* comme somme de fonctions dérivables (la fraction ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^*).

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = -\frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)^2}$$

x	0	1	4	$+\infty$	
$x-1$	-	0	+	+	
$x-4$	-	-	0	+	
x	0	+	+	+	
$(x+2)^2$	+	+	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	12	$\ln(4) + \frac{21}{2}$	$+\infty$	

f est concave sur \mathbb{R}_+^* .

g) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2e^{-2x} \text{ et } f''(x) = 4e^{-2x} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$	+	
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

f est convexe sur \mathbb{R} .

h) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + e^{-x} \text{ et } f''(x) = e^x - e^{-x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

f est concave sur \mathbb{R}_- , convexe sur \mathbb{R}_+ .

i) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - e^{-x} \text{ et } f''(x) = e^x + e^{-x} > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

f est convexe sur \mathbb{R} .

j) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R}^* comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{e^x(1 + e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

f est concave sur \mathbb{R}_- , convexe sur \mathbb{R}_+ .

k) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R}_+^* comme produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(x) + 1 \text{ et } f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

f est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

1) f est définie et dérivable deux fois sur \mathbb{R} comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2xe^{-x^2} \text{ et } f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	
$f''(x)$		+	0	-	0	+
$f'(x)$		-	0	+		
$f(x)$	0		0		0	

f est convexe sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$, concave sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.